L'Actualité économique

L'équilibre concurrentiel comme limite de suites d'équilibres stratégiques de Stackelberg
Competitive equilibrium as the limit of a series of Stackelberg strategic equilibria

Marcel Boyer et Michel Moreaux

Volume 61, numéro 3, septembre 1985

URI : https://id.erudit.org/iderudit/601335ar
DOI : https://doi.org/10.7202/601335ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)
1710-3991 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Boyer, M. & Moreaux, M. (1985). L'équilibre concurrentiel comme limite de suites d'équilibres stratégiques de Stackelberg. *L'Actualité économique*, *61*(3), 299–315. https://doi.org/10.7202/601335ar

Résumé de l'article

Dans cet article, nous considérons le modèle de Stackelberg stricto sensu (dans lequel chaque agent a une stratégie en quantités) mais en introduisant une hiérarchie de firmes. On sait que dans ce cas, c'est le rôle de meneur qui procure un avantage. Nous montrons dans le cadre d'un modèle linéaire à coûts moyens constants que plus le nombre de subordonnés d'un joueur est élevé, plus son profit est élevé. Cependant, lorsque le nombre de joueurs augmente, d'une part la répartition des niveaux de production et de profit reste fondamentalement inégalitaire, mais d'autre part la production totale de l'industrie tend vers la production d'équilibre concurrentiel, convergence préservée en présence de coûts fixes lorsque l'on réplique simultanément la taille au marché et le nombre de firmes, de sorte que, en termes de profits absolus, l'avantage que procure le rang disparaît.

L'Actualité Économique, Revue d'analyse économique, vol. 61, no 3, septembre 1985.

L'ÉQUILIBRE CONCURRENTIEL COMME LIMITE DE SUITES D'ÉQUILIBRES STRATÉGIQUES DE STACKELBERG

Marcel BOYER*
Michel MOREAUX**

Dans cet article, nous considérons le modèle de Stackelberg stricto sensu (dans lequel chaque agent a une stratégie en quantités) mais en introduisant une hiérarchie de firmes. On sait que dans ce cas, c'est le rôle de meneur qui procure un avantage. Nous montrons dans le cadre d'un modèle linéaire à coûts moyens constants que plus le nombre de subordonnés d'un joueur est élevé, plus son profit est élevé. Cependant, lorsque le nombre de joueurs augmente, d'une part la répartition des niveaux de production et de profit reste fondamentalement inégalitaire, mais d'autre part la production totale de l'industrie tend vers la production d'équilibre concurrentiel, convergence préservée en présence de coûts fixes lorsque l'on réplique simultanément la taille au marché et le nombre de firmes, de sorte que, en termes de profits absolus, l'avantage que procure le rang disparaît.

Competitive equilibrium as the limit of a series of Stackelberg strategic equilibria. — In this article, we consider an ordered Stackelberg framework. In such a context, leadership is the preferred position. We show, using a linear model, with constant average costs, that the larger the number of a firm's followers is, the larger its profit. However, as the number of firms increase; the indutry's production converges to the competitive equilibrium level but the distribution of firms' size and profit remains significantly unequal. However, in terms of absolute profits, the rank advantage does disappear in the process. The convergence to a competitive equilibrium industry production level is preserved when we introduce fixed costs and replicate both the size of the market and the number of firms.

Nous remercions Jean Fraysse, Jean-Jacques Laffont et un arbitre anonyme pour leurs commentaires. Nous restons cependant seuls responsables du contenu de cet article.
* Département de Sciences économiques, Université de Montréal.
** GREMAQ, CNRS: UA 938, Université des Sciences sociales de Toulouse, France.

INTRODUCTION

Toutes les conceptions de la concurrence parfaite où celle-ci apparaît comme la limite d'un jeu dans lequel le nombre de joueurs devient infiniment grand supposent que chaque joueur dispose des mêmes possibilités stratégiques a priori. Dans la tradition issue d'Edgeworth (1881), et dont la forme moderne est la théorie du cœur (cf. Debreu-Scarf (1963), Shubik (1984)), chaque échangiste a la même possibilité, le même droit, d'entrer ou non, partiellement ou en totalité, dans une coalition, la même liberté de participer ou non aux échanges, et ce quelle que soit la « taille » de l'agent (cf. par exemple Shitovitz (1973)). Dans l'autre tradition issue de Cournot (1838) (cf. par exemple Mas-Colell (1982) pour un exposé des développements récents), qui conçoit au contraire le marché comme un jeu non coopératif, chaque joueur prend les actions des autres joueurs comme données ; aucun joueur ne dispose a priori d'aucun pouvoir de contrainte sur aucun autre joueur, et tous agissent simultanément. On serait donc assez naturellement amené à poser que l'absence de hiérarchie entre les joueurs est une condition nécessaire de convergence d'un jeu économique vers la concurrence lorsque le nombre des joueurs devient très grand. L'objet de cet article est de démontrer que cette hypothèse ne serait pas fondée. Certains jeux dans lesquels il existe une hiérarchie complète entre les joueurs ont comme équilibre limite un équilibre concurrentiel. Plus précisément, nous montrons que pour deux types de jeux de Stackelberg, lorsque le nombre de concurrents augmente, la production d'équilibre de l'industrie tend vers la production d'équilibre concurrentiel.

Les modèles de marché de type Stackelberg font généralement intervenir deux types d'agents et deux seulement : le ou les meneurs, et le ou les suiveurs. Il est cependant possible de concevoir une hiérarchie complète des acteurs le premier agissant comme meneur vis-à-vis de tous les autres, le second comme suiveur par rapport au premier et comme meneur par rapport aux autres, et ainsi de suite jusqu'au dernier qui agit comme suiveur par rapport à tous ceux qui le précèdent. Tous les joueurs sont ainsi ordonnés. Ce sont de telles hiérarchies que nous étudierons dans cet article.

Il existe autant de modèles de Stackelberg à deux types de joueurs que d'espaces des stratégies possibles des agents. L'intérêt des rôles respectifs de meneur et de suiveur dépend de façon cruciale de l'espace des stratégies choisi par chacun, et dans certains cas du seul espace des stratégies du meneur (Boyer-Moreaux, 1985b).

Dans cet article, nous retiendrons le modèle de Stackelberg stricto sensu (Stackelberg, 1934), dans lequel chaque agent a une stratégie en quantités. On sait que dans ce cas, c'est le rôle de meneur qui procure un avantage. Nous montrons dans le cadre d'un modèle linéaire à coûts moyens constants que plus le nombre de subordonnés d'un joueur est élevé, plus son profit est élevé. Cependant lorsque le nombre de joueurs augmente, d'une part la répartition des niveaux de production reste fondamentalement inégalitaire, mais d'autre part la production totale de l'industrie tend vers la production d'équilibre concurrentiel, de sorte que, en termes de profits absolus, l'avantage que procure le rang disparaît. L'inégalité relative de la distribution des profits, qui reste la même que celle des niveaux de production, demeure forte. Il s'agit d'une distribution inégalitaire d'un montant total de profits qui tend vers zéro. L'introduction de coûts fixes peut modifier considérablement la configuration d'équilibre de l'industrie. La convergence de la production d'équilibre de l'industrie, quelle que soit la distribution de celle-ci entre les firmes, vers la production d'équilibre concurrentiel est cependant préservée lorsqu'on réplique simultanément la taille du marché et le nombre de firmes.

Le modèle (demande et coûts) que nous utiliserons est présenté à la section 1. La section 2 a pour objet l'étude du modèle en quantités et la section 3, l'étude du modèle en quantités avec coûts fixes.

I — LE MODÈLE

Soit le marché d'un bien homogène dont la fonction inverse de demande est :

$$p(Q) = \max\{a - bQ, 0\} \qquad a, b > 0 \tag{I.1}$$

Sur ce marché opèrent différentes firmes ayant chacune la même fonction de coût :

$$C(q) = \begin{cases} 0 & si\ q = 0 \\ f + cq & \text{si } q > 0 \end{cases} \tag{I.2}$$

où $f > 0$ et $0 < c < a$. On notera $CM(q)$ le coût moyen :

$$CM(q) = \frac{f}{q} + c \qquad q > 0 \tag{I.3}$$

et $Cm(q)$ le coût marginal

$$Cm(q) = c \qquad q > 0 \tag{I.4}$$

Sans perte de généralité, on peut poser $a = b = 1$ en redéfinissant les unités de mesure du bien et de la monnaie, et $c = 0$ de sorte que le prix s'interprète comme la marge sur le coût moyen variable.

Un ensemble de firmes $E^{(n)} = \{1, \dots, i, \dots, n\}$ constitue une hiérarchie si pour tout rang i, $i = 2, \dots, n-1$, la ième firme prend comme données les stratégies des firmes de rangs 1 à $i-1$, et tient compte du fait que les choix stratégiques des firmes de rangs $i+1$ à n dépendent de sa propre décision. On appellera meneur la firme de rang 1 dont la décision prend en compte les réactions de toutes les autres firmes, qui lui sont subordonnées, et suiveur la firme de rang n qui considère comme données les décisions de toutes les autres firmes. Une firme de rang i, $i = 2,\dots, n-1$, se comporte comme suiveur vis-à-vis des firmes de rangs 1 à $i-1$, et comme meneur vis-à-vis des firmes de rangs $i+1$ à n.

On appellera réplique d'ordre $r>0$ du marché initial, un marché défini par la fonction inverse de demande $p_r(Q)$ se déduisant de la fonction inverse initiale comme suit :

$$p_r(Q) = p(Q/r) = \max\{a - (b/r)Q, 0\} \tag{I.4}$$

c'est-à-dire, en tenant compte de la convention de normalisation :

$$p_r(Q) = \max\{1-(Q/r), 0\} \tag{I.5}$$

On appellera réduction d'ordre ρ, $0 < \rho < 1$, de la fonction de coût, que l'on notera $C_\rho(q)$, la fonction de coût se déduisant de la fonction de coût initiale comme suit :

$$C_\rho(q) = \rho C(q/\rho) = \begin{cases} 0 & si\ q=0 \\ \rho f + cq & \text{si } q>0 \end{cases} \tag{I.6}$$

Dans une réduction d'ordre ρ le coût moyen et le coût marginal en q sont égaux au coût moyen et au coût marginal en q/ρ sur la fonction de coût initiale.

$$CM_\rho(q) = CM(q/\rho) = (\rho f/q) + c \tag{I.7}$$

$$Cm_\rho(q) = Cm(q/\rho) = c \tag{I.8}$$

Compte tenu des conventions de normalisation que nous avons adoptées :

$$C_\rho(q) = \begin{cases} 0 & \text{si } q = 0 \\ \rho f & \text{si } q > 0 \end{cases} \tag{I.9}$$

$$CM_\rho\,(q) = \rho f/q \quad \text{et} \quad Cm_\rho(q) = 0 \quad \text{si } q>0 \tag{I.10}$$

Pour étudier de « grands » marchés, il est indifférent de « répliquer » la demande, la fonction de coût restant invariante, ou de « réduire » la fonction de coût, la fonction de demande restant invariante. Il est clair qu'il sera plus simple de travailler sur les réductions, et d'omettre les indices ρ en considérant f comme un paramètre variant de 0 à 1 (exclu).

II — ÉQUILIBRES DE STACKELBERG EN QUANTITÉS ET COÛTS MOYENS CONSTANTS

Supposons que l'espace des stratégies de chaque firme i soit l'ensemble des quantités qu'elle peut mettre sur le marché : $q_i \epsilon [0,\infty)$, le prix qui s'établit sur le marché étant celui qui permet l'absorption des quantités offertes par l'ensemble des firmes. La fonction de gain, ou de profit, de chaque joueur Π_i, est alors de la forme :

$$\Pi_i(q_1,\ldots,q_n) = \left(1 - \sum_{j=1}^{n} q_j\right)q_i \tag{II.1}$$

Examinons d'abord le cas d'un duopole. La firme 2, suiveur, prenant la production de la firme 1, meneur, comme donnée, résoud :

$$\max_{q_2 \geq 0} \Pi_2(q_1,q_2) = [1 - (q_1+q_2)]q_2 \tag{II.2}$$

La condition de premier ordre $\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = 0$ permet de définir la fonction de meilleure réponse $\hat{q}_2(q_1)$ de la firme 2 à la production de la firme 1 :

$$\hat{q}_2(q_1) = \max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}q_1, 0\right\} \tag{II.3}$$

La firme 1, tenant compte de la réponse de la firme 2, maximise alors son profit, i.e. résoud :

$$\underset{q_1 \geq 0}{\text{Max}}\ \Pi_1(q_1) = [1 - (q_1 + \hat{q}_2\ (q_1)]q_1 \tag{II.4}$$

Après substitution, un calcul simple montre que la solution de (II.4) est $q_1^* = 1/2$. Portant cette valeur dans la fonction de réaction de 2, (II.3), la production d'équilibre de la firme 2 s'établit alors à $q_2^* = 1/4$.

Considérons maintenant le cas de trois firmes. La troisième firme prend la production des deux premières comme donnée. La fonction de réaction est donc de la forme :

$$\hat{q}_3(q_1+q_2) = \max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(q_1+q_2), 0\right\} \tag{II.5}$$

La firme 2 prend comme donnée la production de la firme 1 et tient compte de la réponse de la firme 3 à la production de la firme 1 et à la sienne. On peut donc définir pour la firme 2 une fonction de meilleure réponse à la production de la firme 1 compte tenu de la réaction de la firme 3. Notons $\hat{q}_2(q_1)$ cette fonction de meilleure réponse. Elle est obtenue comme solution du problème :

$$\underset{q_2 > 0}{\text{Max}}\ \Pi_2(q_1,q_2) = [1 - [q_1+q_2+\hat{q}_3(q_1+q_2)]]q_2 \tag{II.6}$$

Après substitution de $\hat{q}_3(\cdot)$, la condition de premier ordre prend la forme :

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}q_1 - q_2 = 0$$

et donc :

$$\hat{q}_2(q_1) = \max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}q_1, 0\right\} \tag{II.7}$$

La firme 1 tenant compte de la réaction de la firme 2 et de la réaction de la firme 3 à sa décision à elle, firme 1, et à la décision de la firme 2 qu'elle induit, résoud le problème :

$$\underset{q_1 \geq 0}{\text{Max}}\ \Pi_1(q_1) = [1 - [q_1 + \hat{q}_2(q_1) + \hat{q}_3(\hat{q}_2(q_1) + q_1)]]q_1 \tag{II.8}$$

Après substitution, $\Pi_1(q_1)$ devient :

$$\Pi_1(q_1) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}q_1\right)q_1$$

La maximisation de Π_1 implique donc que $q_1^* = 1/2$. En portant dans (II.7), on obtient $q_2^* = 1/4$, et en portant q_1^* et q_2^* dans (II.5), il est clair que la production d'équilibre de la troisième firme de la hiérarchie s'établit à $q_3^* = 1/8$.

Prenons maintenant le cas général d'une hiérarchie à n firmes. Pour un rang $i = 2,...,n$, notons $Q^{<i}$ la somme des niveaux de production des firmes de rangs 1 à $i - 1$. Un raisonnement semblable à celui mené supra montrerait que la fonction de réaction de la n^e firme est de la forme :

$$\hat{q}_n(Q^{<n}) = \max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}Q^{<n}, 0\right\} \tag{II.9}$$

De la même façon, on peut définir la fonction de meilleure réponse de la firme $n-1$ à une production totale $Q^{<n-1}$ des firmes 1 à $n-2$, compte tenu de la réaction de la firme n, qu'on notera $\hat{q}_{n-1}(Q^{<n-1})$. Par récurrence, on peut définir pour une firme de rang $n-k$, $k=0,...,n-1$, sa meilleure réponse à la production totale des firmes 1 à $n-k-1$, compte tenu des réactions successives de toutes les firmes de rang $n-k+1$ à n. Notons $\hat{q}_{n-k}(Q^{<n-k})$ cette fonction. Enfin, pour $k \geq 2$, convenons de noter $\hat{Q}_{n-k}(Q^{<n-k})$ la somme des meilleures réponses des firmes de rangs $n-k$ à n à une production totale $Q^{<n-k}$ des firmes de rangs 1 à $n-k-1$.

$$\begin{aligned}\hat{Q}_{n-k}(Q^{<n-k}) &= \hat{q}_{n-k}(Q^{<n-k}) + \hat{q}_{n-k+1}(Q^{<n-k} + \hat{q}_{n-k}(Q^{<n-k})) + \ldots \\ &+ \hat{q}_n(Q^{<n-k} + \hat{q}_{n-k}(Q^{<n-k}) + \hat{q}_{n-k+1}(Q^{<n-k} + \hat{q}_{n-k}(Q^{<n-k})) + \ldots)\end{aligned} \tag{II.10}$$

Proposition II.1 : Si pour $k = 2,\dots,n-2$

$$\hat{Q}_{n-(k-1)}(Q^{<n-(k-1)}) = \frac{2^{(k-1)+1}-1}{2^{(k-1)+1}} - \frac{2^{(k-1)+1}-1}{2^{(k-1)+1}} Q^{<n-(k-1)} \quad \text{(II.11)}$$

alors

1) $$\hat{q}_{n-k}(Q^{<n-k}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} Q^{<n-k}, \quad \text{(II.12)}$$

2) $$\hat{Q}_{n-k}(Q^{<n-k}) = \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}} - \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}} Q^{<n-k} \quad \text{(II.13)}$$

Preuve :

$$\begin{aligned}\Pi_{n-k} &= [1 - (Q^{<n-k} + q_{n-k} + \hat{Q}_{n-(k-1)}(Q^{<n-k} + q_{n-k}))]q_{n-k} \\ &= \left[\frac{1}{2^{(k-1)+1}} - \frac{1}{2^{(k-1)+1}} Q^{<n-k} - \frac{1}{2^{(k-1)+1}} q_{n-k}\right] q_{n-k}\end{aligned}$$

La condition de premier ordre d'un maximum de Π_{n-k} par rapport à q_{n-k} implique alors la relation (II.12). Par définition :

$$\hat{Q}_{n-k}(Q^{<n-k}) = \hat{q}_{n-k}(Q^{<n-k}) + \hat{Q}_{n-(k-1)}(Q^{<n-k} + \hat{q}_{n-k}(Q^{<n-k})).$$

En substituant $\hat{q}_{n-k}(\cdot)$ donné par (II.12) et $\hat{Q}_{n-(k-1)}(\cdot)$ donné par (II.11) dans cette définition on en déduit immédiatement (II.13). *QED.*

Le calcul de $\hat{q}_{n-1}(Q^{<n-1})$ à partir de (II.9) et de (II.10) et la proposition ci-dessus, impliquent, en remarquant que $i=n-k$, que :

$$\hat{q}_i(Q^{<i}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} Q^{<i} \qquad i = 2,\dots,n \quad \text{(II.14)}$$

et que :

$$\hat{Q}_i(Q^{<i}) = \frac{2^{n-i+1}-1}{2^{n-i+1}} - \frac{2^{n-i+1}-1}{2^{n-i+1}} Q^{<i} \qquad i = 2,\dots,n \quad \text{(II.15)}$$

Le problème de la firme 1 est alors le suivant :

$$\operatorname*{Max}_{q_1 \geqslant 0} \Pi_1(q_1) = [1 - (q_1 + \hat{Q}_2(q_1))]q_1 \quad \text{(II.16)}$$

soit après substitution :

$$\operatorname*{Max}_{q_1 \geqslant 0} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}} q_1\right) q_1$$

dont la solution est : $q_1^* = 1/2$.

Remarquons alors que pour tout $j \geqslant 2$:

$$\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^2 - \dots - (\frac{1}{2})^j = (\frac{1}{2})^j \quad \text{(II.17)}$$

(II.17) et (II.14) impliquent que

$$q_i^* = (\frac{1}{2})^i \qquad i=1,\dots,n \tag{II.18}$$

La production totale $Q^{(n)}$ s'élève donc à:

$$Q^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{2})^i \tag{II.19}$$

et

$$\lim_{n \to \infty} Q^{(n)} = 1$$

Dans un équilibre de Stackelberg en quantités, la production d'une firme de rang i est indépendante du nombre de firmes en concurrence hiérarchisée. Cependant, la constance de ce niveau de production ne signifie pas que le pouvoir de monopole associé à un certain rang est indépendant du nombre de firmes en compétition. En premier lieu, la part de marché associée à un rang donné diminue avec le nombre des concurrents. Cependant, puisque la production totale tend vers 1, la part de marché associée à un certain rang i est toujours au moins égale à $(1/2)^i$. En second lieu, le pouvoir de monopole moyen de l'industrie tend vers zéro puisque la production totale tend vers la production concurrentielle. Néanmoins, la répartition de ce profit qui tend vers zéro est proportionnelle aux niveaux de production et donc la part du profit de l'industrie associée à un certain rang i est toujours au moins égale à $(1/2)^i$.

Afin de mieux apprécier les conséquences de la hiérarchie qui s'instaure entre les firmes, il est utile de comparer ce type d'équilibre à l'équilibre de Nash avec le même espace de stratégie, i.e. à un équilibre de Cournot. Dans le cas présent, l'équilibre de Cournot est unique, la production d'une firme dans un équilibre à n firmes est égale à $1/(n+1)$, et la production totale s'élève à $n/(n+1)$. La production totale dans l'équilibre de Stackelberg à n firmes peut encore s'écrire (compte tenu de l'identité (II.17)): $1 - (1/2)^n$. Puisque $2^n > n+1$ si $n > 1$, alors $1 - (1/2)^n > n/(n+1)$ et la production totale de l'équilibre de Stackelberg est toujours supérieure à celle de l'équilibre de Cournot avec le même nombre de firmes. Par ailleurs, puisque pour $n \geqslant 2$ la production totale à l'équilibre de Cournot s'établit à un niveau où la recette de l'industrie est décroissante, le profit total de l'industrie à l'équilibre de Cournot sera toujours supérieur au profit total à l'équilibre de Stackelberg. Examinons maintenant la situation du meneur. Le prix d'équilibre étant $(1/2)^n$ et sa production $(1/2)$, son profit s'élève à $(1/2)^{n+1}$. Dans un équilibre de Cournot, le profit de n'importe quelle firme s'élève à $(1/n+1)^2$. Pour $n = 2$, le profit du meneur de Stackelberg est donc égal à 1/8, supérieur à celui d'une firme en équilibre de Cournot qui est 1/9. Pour $n = 3$, le profit du meneur est le même que dans l'équilibre de Cournot. Mais pour $n > 3$, on a toujours $(1/2)^{n+1} < (1/n+1)^2$ de sorte que le profit du meneur est toujours inférieur au profit d'une firme dans un équilibre de Cournot. Dans ce cas, le passage d'un équilibre de Cournot à un équilibre de Stackelberg ne profiterait à personne, pas même au meneur.

Proposition II.2: À l'équilibre de Stackelberg en quantités du modèle linéaire considéré dans cette section:

1) la production d'une firme de rang i est indépendante du nombre de firmes de la hiérarchie, et d'autant plus grande que ce rang est élevé (i.e. i est faible).
2) La production totale est toujours supérieure à celle de l'oligopole de Cournot mettant en concurrence le même nombre de firmes. Cette production tend vers la production concurrentielle lorsque le nombre de firmes tend vers l'infini.

Le lecteur vérifiera aisément que, pour toute hiérarchie d'un nombre donné n de firmes, à l'équilibre de Stackelberg dans les différentes répliques d'ordre r, le prix qui s'établit sur le marché est le même que dans l'économie initiale. La seule différence porte sur les quantités. Pour toute firme de rang i le niveau de production est multiplié par r. La répartition des productions relatives, et celle des profits relatifs, en fonction du rang sont donc indépendantes de la « taille » du marché.

III — ÉQUILIBRES DE STACKELBERG EN QUANTITÉS ET COÛTS FIXES

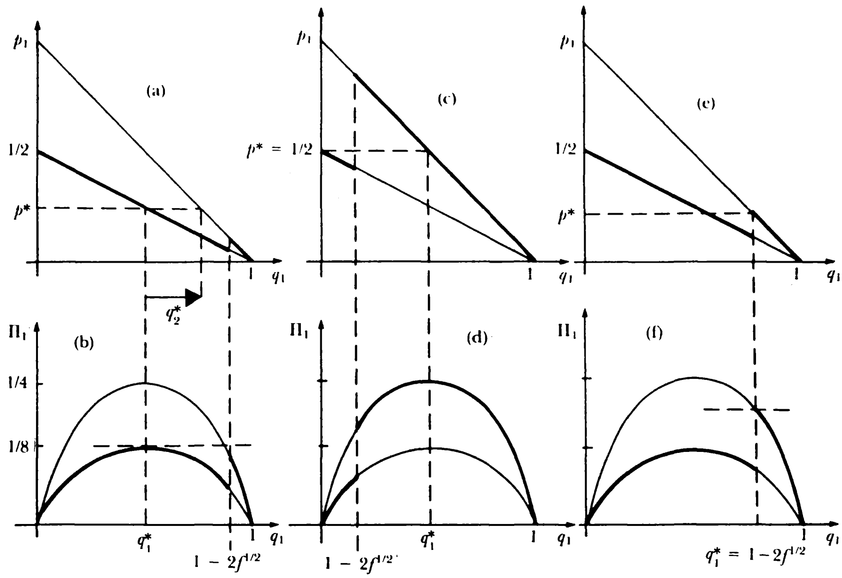
La présence d'un coût fixe ne modifie évidemment pas les coûts marginaux. Donc, pour de petites valeurs du coût fixe, la structure de l'industrie devrait être la même que celle mise en évidence en l'absence de coût fixe si le nombre de firmes n'est pas très élevé, puisque la présence du coût fixe impose une borne supérieure au nombre de firmes produisant effectivement à l'équilibre. Pour une valeur donnée du coût fixe le nombre de concurrents produisant effectivement à l'équilibre va dépendre de façon critique du nombre de compétiteurs potentiellement en concurrence dans la hiérarchie. On montrera qu'en fait, à l'équilibre, ou bien toutes les firmes produisent, ou bien seule la firme 1 produit.

Examinons d'abord le cas d'un duopole. La fonction de réaction de la seconde firme présente maintenant, du fait de la décroissance du coût moyen, une discontinuité en $1 - 2f^{1/2}$:

$$\hat{q}_2(q_1) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} q_1 & \text{si} \quad 0 < q_1 < 1 - 2f^{1/2} \\ \{0, f^{1/2}\} & \text{si} \quad q_1 = 1 - 2f^{1/2} \\ 0 & \text{si} \quad 1 - 2f^{1/2} < q_1 \end{cases} \qquad \text{(III.1)}$$

La demande résiduelle au meneur, firme 1, compte tenu de la réaction de la firme 2 est illustrée à la figure III.1 (a, c et e). Les segments en traits gras représentent le prix qui s'établira sur le marché, en fonction de la quantité livrée par la firme 1 compte tenu de la réaction de la firme 2. En l'absence de coût fixe, ce prix en fonction de q_1 serait représenté par la droite de pente $-1/2$ joignant (0,1/2) à (1,0).

FIGURE III.1



La fonction de profit de la firme 1, en tant que fonction de la quantité qu'elle met sur le marché et compte tenu de la réaction du suiveur présente donc une discontinuité en $1-2f^{1/2}$. Il est clair que si f est proche de zéro, on est dans une situation voisine de celle où il n'y a pas de coût fixe, et la maximisation du profit de la firme 1 l'amènera à produire $q_1^* = 1/2$, la firme 2 produisant $q_2^* = 1/4$ (Figure III.1.b). Si inversement le coût fixe est proche de un, la maximisation des profits de la firme 1 l'amènera à produire la quantité de monopole $q_1^* = 1/2$ (Figure III.1.d). Prenant cette quantité comme donnée, la firme 2 ne produit rien. Les valeurs de f pour lesquelles on est dans cette situation sont celles pour lesquelles $1-2f^{1/2} < 1/2$, c'est-à-dire $f > 1/16$. Notons que puisque la recette maximale est 1/4, alors pour un coût fixe supérieur à 1/4, le meneur lui-même sort du marché. Il reste à examiner comment s'équilibre le modèle pour $f < 1/16$. Cherchons la valeur de f pour laquelle le meneur serait indifférent entre d'une part produire la quantité $q_1^* = 1/2$ et laisser le suiveur sur le marché et d'autre part produire $q_1 = 1-2f^{1/2}$ et sortir le suiveur du marché (comme en III.1.f). Dans le premier cas, son profit est:

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \left[1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ q_1^* + q_1^*\right)\right] q_1^* - f \\ &= \frac{1}{8} - f\end{aligned} \tag{III.2}$$

Dans le second cas, son profit s'élève à:

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= [1 - (1 - 2f^{1/2})]\,[1 - 2f^{1/2}] - f \\ &= -5f + 2f^{1/2}\end{aligned} \tag{III.3}$$

Pour que le meneur préfère produire $1 - 2f^{1/2}$ et sortir le suiveur, il faut donc que:

$$\frac{1}{8} - f \leqslant -5f + 2f^{1/2}$$

soit

$$\frac{1}{16} \leqslant f^{1/2} - 2f \tag{III.4}$$

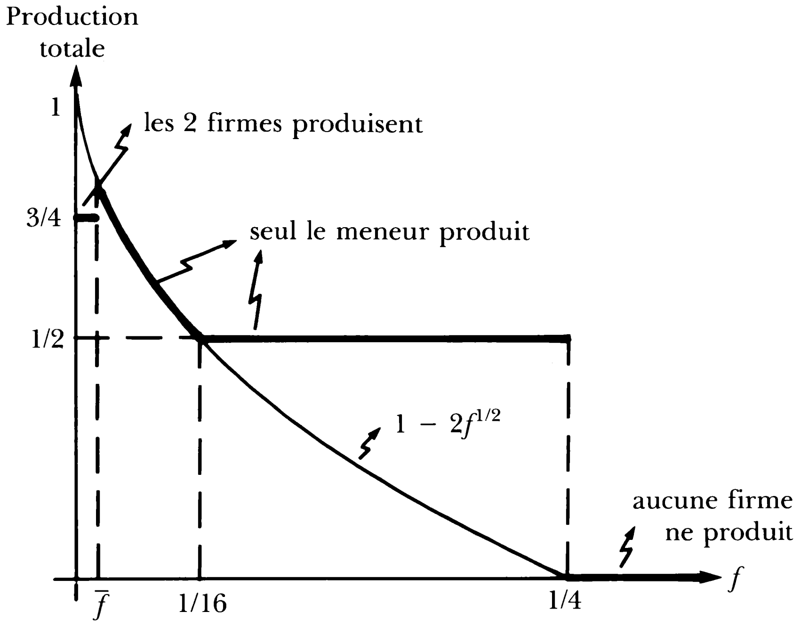
La valeur de f à partir de laquelle le meneur préférera produire $1 - 2f^{1/2}$ et sortir le suiveur est donc la plus petite racine de l'équation $1/16 = f^{1/2} - 2f$. Notons $\overline{f}$ cette valeur qui est inférieure à 1/16 puisque pour $f = 1/16, f^{1/2} - 2f = 1/8$. Alors, l'équilibre de Stackelberg en quantités d'un duopole en tant que fonction de f s'établit comme suit:

$0 \leqslant f < \overline{f}$	le meneur produit $q_1^* = \frac{1}{2}$, le suiveur $q_2^* = \frac{1}{4}$
$\overline{f} \leqslant f < \frac{1}{16}$	le meneur produit $q_1^* = 1 - 2f^{1/2}$, le suiveur $q_2^* = 0$
$\frac{1}{16} \leqslant f < \frac{1}{4}$	le meneur produit $q_1^* = \frac{1}{2}$, le suiveur $q_2^* = 0$
$\frac{1}{4} \leqslant f$	aucune firme ne produit.

On remarquera qu'en $\overline{f}$ la production du meneur $1 - 2\overline{f}^{1/2}$, est supérieure aux productions réunies du meneur et du suiveur pour $f < \overline{f}$ qui s'élèvent à 3/4. En effet, la valeur de f pour laquelle $1 - 2f^{1/2} = 3/4$ est $f = 1/64$. Mais pour $f = 1/64, f^{1/2}(1 - 2f^{1/2}) = 3/32 > 1/16$. Donc $\overline{f} > 1/64$, et $1 - 2\overline{f}^{1/2} > 3/4$.

La production totale en tant que fonction de f est représentée à la figure III.2

FIGURE III.2



Considérons maintenant une hiérarchie à trois firmes. La fonction de réaction de la firme 3 est:

$$\hat{q}_2(q_1 + q_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}(q_1 + q_2) & 0 \leqslant q_1 + q_2 < 1 - 2f^{1/2} \\ \{0, f^{1/2}\} & q_1 + q_2 = 1 - 2f^{1/2} \\ 0 & 1 - 2f^{1/2} < q_1 + q_2 \end{cases} \qquad \text{(III.5)}$$

Examinons alors la situation de la firme 2 qui prend q_1 comme donnée et tient compte de la réaction de 3. Comme au point précédent, si f est voisin de 0 on est dans une situation proche de celle où il n'y a pas de coûts fixes. Supposons au contraire le coût fixe très élevé. Pour q_1 proche de zéro, la firme 2 est dans une situation proche de celle du meneur du point précédent. Elle maximisera ses profits en fixant un niveau de production proche de 1/2 (d'autant plus proche que q_1 est voisin de 0). La meilleure réponse de 2, compte tenu de la réaction de 3 sera donnée par $\hat{q}_2(q_1) = 1/2 - 1/2\, q_1$, jusqu'à ce que $q_1 = 1 - 2f^{1/2}$, auquel cas la firme 2 sera indifférente entre produire $f^{1/2}$ et ne pas produire. Pour des valeurs de q_1

supérieures à $1 - 2f^{1/2}$, la firme 2 ne produira rien. La situation à laquelle la firme 1 fait face est la même qu'au point précédent, la firme 3 n'apparaissant en fait jamais sur le marché, et finalement seule la firme 1 produirait 1/2 à l'équilibre, les firmes 2 et 3 étant éliminées. Considérons enfin des valeurs « intermédiaires » de f. On pourrait alors être dans la situation suivante. Pour q_1 faible, la firme 2 a intérêt à laisser la firme 3 produire et réagir selon (III.5). Pour q_1 plus élevé, la firme 2 aurait intérêt à sortir la firme 3 du marché en produisant $(1 - 2f^{1/2}) - q_1$, q_1 croissant encore la firme 2 réagirait selon $\hat{q}_2(q_1) = 1/2 - 1/2\, q_1$ (dès que $\hat{q}_2(q_1) + q_1 \geqslant 1 - 2f^{1/2}$) la firme 3 étant sortie du marché. Enfin, pour $q_1 \geqslant 1 - 2f^{1/2}$, la firme 2 à son tour sortirait du marché. La meilleure réponse de la firme 2 présenterait deux discontinuités. La première lorsqu'elle sort la firme 3 du marché, la seconde lorsqu'elle sort elle-même du marché. Quelle serait alors la production décidée par 1 ? Il est clair que la firme 1 n'a jamais intérêt à laisser la firme 2 produire le complément $(1 - 2f^{1/2}) - q_1$ permettant à la firme 2 de sortir la firme 3 du marché et rester elle-même sur le marché. En produisant $1 - 2f^{1/2}$, la firme 1 peut éliminer la firme 2 et au même prix, $1 - (1 - 2f^{1/2})$, elle produit plus et obtient donc un profit plus élevé qu'en produisant simplement q_1. Pour cette raison, l'équilibre dans une hiérarchie à trois firmes ne peut être que de l'un des trois types suivants :

— ou bien les trois firmes produisent, si f est suffisamment faible, inférieur à une certaine limite $\tilde{f}$, et leurs niveaux de production sont les mêmes qu'en l'absence de coûts fixes puisque le coût marginal est le même dans les deux modèles,

— ou bien seule la firme 1 produit, et elle produit $q_1^* = 1 - 2f^{1/2}$ pour f compris entre $\tilde{f}$ et 1/16, ou $q_1^* = 1/2$ pour f compris entre 1/16 et 1/4,

— ou bien aucune firme ne produit le coût fixe étant trop élevé, supérieur à 1/4.

L'argument est parfaitement général, à savoir, en aucun cas une firme de rang i n'a intérêt à laisser une firme d'un rang $j > i$ produire le complément entre $Q^{<j}$ et $1 - 2f^{1/2}$, qui permettrait à la firme j de sortir du marché les firmes $j+1,...,n$. La firme aurait intérêt à produire elle-même $(1 - 2f^{1/2}) - Q^{<i}$. Par récurrence, il est clair que ou toutes les firmes produisent ou seule la firme 1 produit, et la situation où un certain nombre de firmes $1,2,...,i$ produiraient, les autres $i + 1,...,n$ étant éliminées du marché ne peut jamais apparaître. La valeur critique du coût fixe pour laquelle on passe d'une situation où toutes les firmes produisent à celle où seule la firme 1 produit dépend du nombre de firmes dans la hiérarchie. Dans une hiérarchie à n firmes où toutes les firmes produisent la production de l'industrie est $1 - (1/2)^n$ et la firme 1 produit 1/2, son profit est donc :

$$\Pi_1 = \left(1 - (\frac{1}{2})^n\right) \frac{1}{2} - f$$

Le profit qu'obtiendrait la firme 1 en produisant $1 - 2f^{1/2}$ et en sortant toutes les firmes du marché serait (cf. supra)

$$\Pi_1 = -5f + 2f^{1/2} \tag{III.6}$$

La valeur critique du coût fixe pour laquelle seule la firme 1 produit est donc donnée par la plus petite racine positive de l'équation :

$$\left(1 - (\frac{1}{2})^n\right) \frac{1}{2} - f = -5f + 2f^{1/2} \tag{III.7}$$

On notera $\tilde{f}(n)$ cette valeur. Afin d'établir que $\tilde{f}(n)$ est la valeur critique du coût fixe pour laquelle on passe d'une structure d'équilibre avec n firmes actives à une structure où seul le meneur produit, il faut encore démontrer que pour $f \in [0, \tilde{f}(n))$ toute firme de rang $i > 1$ a intérêt à produire $(1/2)^i$ lorsque les firmes $i' = 1,\ldots,i-1$ produisent chacune $(1/2)^{i'}$, et les firmes $i' = i+1,\ldots,n$ produisent chacune également $(1/2)^{i'}$, plutôt que produire $(1-2f^{1/2}) - \sum_{i'=1}^{i-1} (1/2)^{i'}$ c'est-à-dire sortir du marché les firmes de rang $i' > $ i. Or notons que dans la première éventualité, le gain de i est $(1/2)^{n+i} - f$ et dans la seconde $\left((1/2)^{i-1} - 2f^{1/2}\right)(2f^{1/2}) - f$. Une condition suffisante est donc que :

$$f \in [0, \tilde{f}(n)) \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n+i} > \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} - 2f^{1/2}\right)\left(2f^{1/2}\right) \tag{III.8}$$

Pour $f = 0$, la condition (III.8) est évidemment vérifiée.

Pour $f \in (0, \tilde{f}(n))$, notons que par définition :

$$f \in (0, \tilde{f}(n)) \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > \left(1 - 2f^{1/2}\right)\left(2f^{1/2}\right) \tag{III.9}$$

Donc, pour que (III.8) soit vérifiée, il suffit que :

$$\frac{(1/2)^{n+i}}{(1/2)^{n+1}} > \frac{\left((1/2)^{i-1} - 2f^{1/2}\right)\left(2f^{1/2}\right)}{\left(1 - 2f^{1/2}\right)\left(2f^{1/2}\right)} \tag{III.10}$$

Puisque $1 - 2f^{1/2} > 0$, (III.10) est équivalent à :

$$1 + 2f^{1/2}\,(2^{i-1} - 1) > 1 \tag{III.11}$$

qui est vérifiée pour tout $i \geqslant 2$ et $f > 0$.

La proposition III.1 ci-dessous est donc démontrée.

Proposition III.1 : À l'équilibre de Stackelberg en quantité du modèle linéaire avec coût fixe f:

1) ou bien toutes les firmes produisent si $f \in [0, \tilde{f}(n))$, la production d'une firme de rang i étant égale à $(1/2)^i$
2) ou bien seul le leader produit si $f \in [\tilde{f}(n),\ 1/4)$. Sa production sera égale à $1 - 2f^{1/2}$ si $f \in [\tilde{f}(n),\ 1/16]$, et 1/2 si $f \in (1/16,\ 1/4)$
3) ou bien aucune firme ne produit si $f \geqslant 1/4$.

On notera que lors du passage d'une structure d'équilibre à n firmes actives à une structure où seul le meneur produit, la production totale de l'industrie fait un saut. En effet, on peut démontrer que $1-2(\tilde{f}^{(n)})^{1/2} > 1-(1/2)^n$.

Si maintenant on considère le coût fixe, f, comme donné et on analyse la structure d'équilibre de l'industrie en fonction du nombre de firmes n de la hiérarchie, alors pour n suffisamment faible $\tilde{f}(n) > f$ et toutes les firmes produisent, et dès que $\tilde{f}(n) \leqslant f$ seule la firme 1 reste présente sur le marché. Le nombre de firmes actives à l'équilibre est donc, pour un f donné, une fonction fortement « discontinue » du nombre de compétiteurs potentiels présents dans la hiérarchie.

Mais alors que le nombre de firmes actives décroît lorsque le nombre de compétiteurs potentiels devient tel que $\tilde{f}(n) < f$, le produit total de l'industrie augmente, puis reste constant. La production totale de l'industrie est en effet égale à $1-(1/2)^n$ tant que $1-(1/2)^n \leqslant 1-2f^{1/2}$ et reste égale à $1-2f^{1/2}$ produit par le seul meneur si $1-(1/2)^n > 1-2f^{1/2}$. L'évolution du produit total de l'industrie est donc assez régulière.

Examinons maintenant le comportement asymptotique des grands marchés ou des réductions. Soit $\{f_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\lim_{t\to\infty} f_t = 0$ une suite de réductions. À chaque élément de cette suite, associons une hiérarchie $E^{(n_t)}$, et soit $Q^{(n_t)}$ la production d'équilibre de la hiérarchie $E^{(n_t)}$ pour la valeur f_t du coût fixe. Définissons $\tilde{n}(f)$ comme suit :

$$\tilde{n}(f) = \max \{n | \tilde{f}(n) > f\}$$

$\tilde{n}(f)$ est le nombre maximal de compétiteurs potentiels d'une hiérarchie pour qu'ils soient tous actifs à l'équilibre lorsque le coût fixe est égal à f.

Proposition III.2

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\lim_{t\to\infty} Q^{(n_t)} = 1$, la production d'équilibre concurrentiel, est que $\lim_{t\to\infty} n_t = \infty$. Si, de plus $\forall t$, $n_t \leqslant \tilde{n}(\tilde{f}(n_t))$ alors en tout point de la suite toutes les firmes sont actives.

Preuve

Pour tout t, ou bien $n_t \leq \tilde{n}(\tilde{f}(n_t))$ et alors toutes les firmes sont actives et le produit de l'industrie est $1-(1/2)^{n_t}$, ou bien $n_t > \tilde{n}(\tilde{f}(n_t)$ et alors seul le meneur produit et la production de l'industrie est $1-2f_t^{1/2}$; donc $\lim_{t\to\infty} \min \{1-2f_t^{1/2}, 1-(1/2)^{n_t}\} = 1$.

CONCLUSION

Nous avons montré dans cet article que l'équilibre concurrentiel n'est pas significativement différent d'un équilibre stratégique à la Stackelberg, i.e. avec une hiérarchie de meneurs et de suiveurs, lorsque le nombre de firmes est assez grand. Ce résultat confirme l'intérêt du modèle d'équilibre concurrentiel même dans les cas où de toute évidence il ne correspond pas à une représentation factuelle et descriptive du comportement réel des firmes individuelles. En effet, même si ces firmes se perçoivent correctement comme impliquées dans un jeu stratégique fort complexe, l'économiste peut être justifié d'utiliser un modèle d'équilibre concurrentiel pour analyser et prédire les résultats de ce jeu. Nous avons dans cet article contribué à élargir l'ensemble des jeux de marché stratégiques pour lesquels l'équilibre concurrentiel s'avère être une bonne approximation. Nous étudierons dans un autre article (Boyer et Moreaux, 1985a) la convergence dans le cadre d'un jeu hiérarchique où les stratégies sont exprimées en prix *et* en quantités, ajoutant un élément de réalisme descriptif à ce type de modèle.

Ces résultats sont importants pour deux raisons fondamentales. D'abord, le modèle concurrentiel ne correspond pratiquement à aucune situation économique réelle ; si les économistes l'utilisent abondamment, c'est qu'il est commode et facile à utiliser comparativement à des modèles d'équilibre stratégiques plus descriptifs mais beaucoup trop complexes pour être utilisés couramment ; par contre, l'utilisation du modèle concurrentiel, étant loin d'être une représentation descriptive du comportement réel des agents en général et des entreprises en particulier, pourrait mener à des conclusions plus ou moins fiables si nous n'avions pas une évaluation crédible de l'erreur que ce recours au modèle d'équilibre concurrentiel implique. L'étude des conditions de convergence des équilibres stratégiques vers un équilibre concurrentiel vient répondre en partie à cette interrogation. Par ailleurs, les équilibres stratégiques avec firmes actives et firmes potentielles en sont encore aux premiers stades de développement et la convergence dans ce contexte pourrait être plus forte et plus rapide ce qui justifierait encore davantage le recours au modèle d'équilibre concurrentiel. Les développements récents du concept des marchés contestables en sont un des phénomènes, mais l'étude formelle de ces modèles reste encore à faire en bonne partie.

BIBLIOGRAPHIE

BOYER, M. et M. MOREAUX, (1985a), « La convergence d'équilibres stratégiques en prix-quantités vers l'équilibre concurrentiel », *L'Actualité Économique/Revue d'Analyse Économique* (à paraître).

BOYER, M. et M. MOREAUX (1985b), « On Stackelberg Equilibria with Differentiated Products : The Critical Role of the Strategy Space », Cahier 8524, Département de Sciences économiques, Université de Montréal.

COURNOT, A.A.(1838), *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, Hachette, Paris.

DEBREU, G. et H. SCARF (1963), « A Limit Theorem on the Core of an Economy », *International Economic Review* 4, pp. 235-246.

EDGEWORTH, F.Y.(1881), *Mathematical Psychics : An Essay on the Application of Mathematics to the Moral Sciences*, C. Kegan Paul, Londres.

MAS-COLELL, A. (1982), « The Cournotian Foundations of Walrasian Equilibrium : An Exposition of Recent Theory », in W. Hildenbrand, éd., *Advances in Economic Theory*, Cambridge University Press, Cambridge.

SHITOVITZ (1973), « Oligopoly in Markets with a Continuum of Traders », *Econometrica* 41, pp. 467-501.

SHUBIK, M. (1959), *Strategy and Market Structure*, John Wiley, New York.

SHUBIK, M. (1984), *A Game Theoretic Approach to Political Economy*, MIT Press, Cambridge.

STACKELBERG, H. VON (1934), *Marktform und Gleichgewicht*, Julius Springer, Vienna.